

MODELADO DE LA AUTOORGANIZACIÓN AMBIENTAL

FECHA DE RECEPCIÓN: 15-12-24 / FECHA DE ACEPTACIÓN: 03-05-25

Mauro Montealegre Cárdenas

PH.D. MATEMÁTICAS Y PROFESOR TITULAR USCO

Correo electrónico: mmonteal@usco.edu.co

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1577-5971>

Joan Manuel Montealegre Hermosa

Mg. INGENIERÍA AMBIENTAL Y PROYECTO ONDAS MINTIC USCO

Correo electrónico: joan.montealegre@usco.edu.co

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-6956-3783>

Jasmidt Vera Cuenca

DOCTORADO COMPLEJIDAD Y PROFESORA TITULAR USCO

Correo electrónico: jasmidt.vera@usco.edu.co

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8965-0661>

RESUMEN

En este artículo proponemos un método centrado en los modelos complejo para integrar los procesos resilientes y adaptativos frente al reto de la sostenibilidad ambiental, J. Holland (2004). En particular los procesos emergentes de la variabilidad climática que conducen sistemas autoorganizadas con funciones cruzadas en ciclos adaptativos: exploración, conservación, liberación y reorganización. Corresponden modelo de C. Holling (2011) sobre ciclos que refleja los cambios súbitos en el proceso de adaptación climática.

Palabras clave: Sostenibilidad y vulnerabilidad ambiental, procesos resilientes, procesos adaptativos, adaptación climática.

ABSTRACT

In this article, we propose a method focused on complex models to integrate resilient

and adaptive processes in response to the challenge of environmental sustainability (J. Holland, 2004). Specifically, we address the emerging processes of climate variability that lead to self-organized systems with cross-functional roles in adaptive cycles: exploration, conservation, release, and reorganization. These align with C. Holling's (2011) model of cycles, which reflects sudden changes in the process of climate adaptation.

Keywords: Environmental sustainability and vulnerability, resilient processes, adaptive processes, climate adaptation.

1. PENSAMIENTO RESILIENTE

C. Holling (2011) ilustra en la figura 1 la complejidad del modelamiento de la sostenibilidad ambiental mediante procesos resilientes y adaptativos, G. Gallopín (2006). Proceso que J. Holland (2004) describe a través de cuatro propiedades básicas para estos sistemas adaptativos complejos: agrupación, no linealidad, diversidad y flujo, de las que surgen propiedades emergentes que se autoorganizan con funciones cruzadas en ciclos de exploración, conservación, liberación y reorganización, como ilustra en la siguiente figura 1, en la cual el eje y está la cantidad de capital acumulado en términos nutrientes y carbono y en el eje x el grado de conexión entre las variables hacia un sistema más organizado.

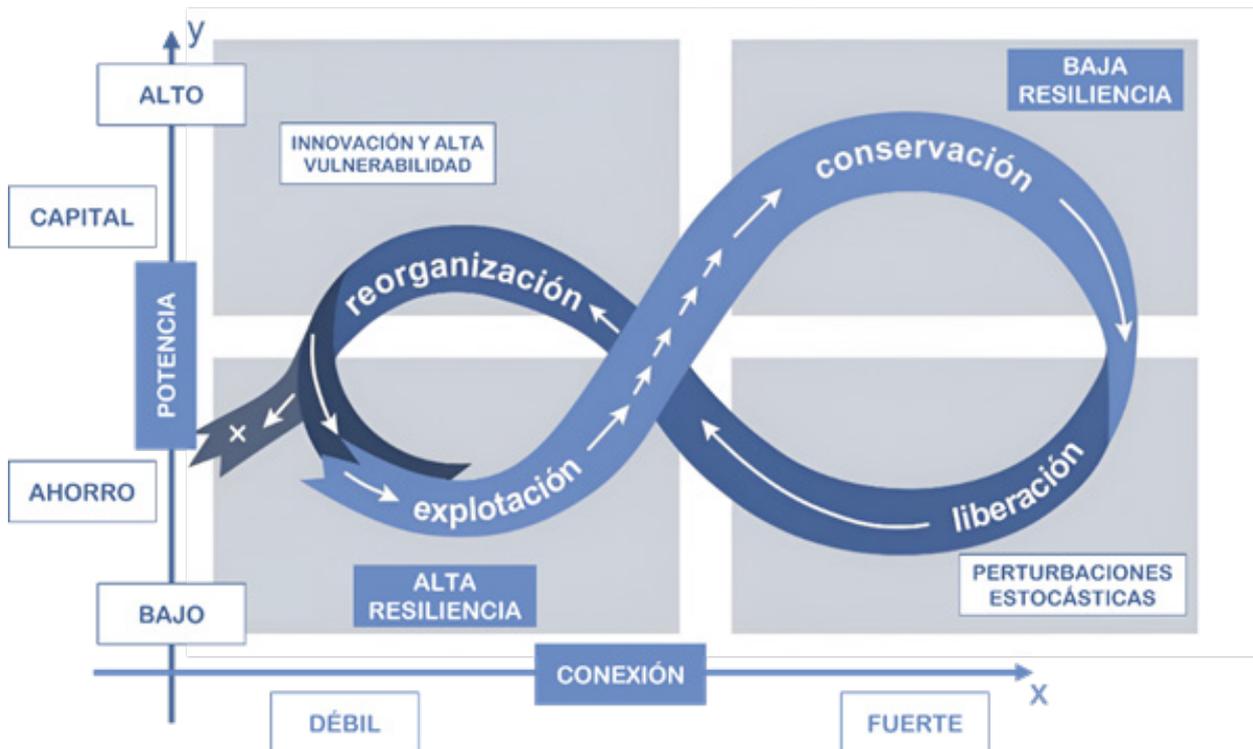


FIGURA 1. SISTEMA SOCIO-ECOLÓGICO DEL CICLO ADAPTATIVO DE UN ECOSISTEMA Y SU FLUJO, HOLLING C. (2011)

2. VULNERABILIDAD AMBIENTAL

La vulnerabilidad ambiental depende del incremento del CO₂ en la atmosfera, consumo del agua y crecimiento de población. En este contexto el conflicto de servicios ecosistémicos y los intereses de los muchos agentes económicos A_E y ecológicos A_{E□}), quienes interactúan básicamente con el siguiente cambio de variable,

$$\begin{cases} x = (1 - A_{E□})^{-1} y \\ y = A_{E□} x \end{cases}$$

para evaluar la resiliencia en Agricultura, Infraestructura, Planificación, Salud.

En ecosistemas a través del mercado del carbono, eficiencia energética, planificación y buen uso del suelo, se estima el índice de impacto I, donde $I = B - \sum(HV) - □ - M$, donde B son los beneficios, H azar, V vulnerabilidad, □ adaptación y M mitigación, ver Alexander, E.R., Geographic information systems, Kluwer Acad. Press 1995.

3. RESILIENCIA LINEAL

La medida de la resiliencia más utilizada y fácilmente calculado se basa en los valores propios en la cuenca de atracción de un sistema lineal en torno de un equilibrio de $\frac{dN}{dt} = f(N)$ con $f(N^k) = 0$ y $x(t) = N(t) - N^k$ en el siguiente sistema bidimensional,

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

Con solución única $x(t) = e^{-At} x_0$. Cuando los valores propios de A son todos negativos entonces $e^{-At} \rightarrow 0$ y la solución de equilibrio $x^* = 0$ es asintóticamente estable, por ello para casi todas las condiciones iniciales se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_1(A)t} x(0) \propto w_1$$

donde $\lambda_1(A)$ es el valor propio de A con la parte real más grande y w_1 es el vector propio correspondiente. Por lo tanto, x es aproximadamente proporcional a w_1 y decae tanto como $-\lambda_1(A)t$ para t grande, y la magnitud de x disminuye por el factor $\frac{1}{e}$ en un intervalo de tiempo de longitud $-\frac{1}{Re(\lambda_1(A))}$.

La resiliencia inicial es la razón de retorno al equilibrio para matriz diagonal es Arnoldi, Loreau y Haegeman (2016), $R_0 = \inf_{|x_0|=1} \left(-\frac{d}{dt} |e^{tA} x_0| \Big|_{t=0} \right)$, para el caso no diagonal es $R_0 = -\frac{1}{2} \lambda_{dom}(A + A^T)$, se define reactividad como el opuesta de R_0 .

La resiliencia asintótica relacionada con el tamaño de la cuenca de atracción se define como,

$$R_\infty = \inf_{|x_0|=1} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln |e^t A x_0| \right) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re}(\lambda_1(A)) = -\operatorname{Re}(\lambda_{\text{dom}}(A))$$

La sensibilidad de la resiliencia se debe a las afectaciones súbitas en el ecosistema, Rafikul, A (2016), con valores propios v_1 y w_1 de A se calcula:

$$\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial a_{ij}} = \frac{v_1 w_1^T}{v_1^T w_1}, \quad \text{esto es} \quad \frac{\partial(\text{resiliencia})}{\partial a_{ij}} = -\operatorname{Re} \left(\frac{v_1 w_1^T}{v_1^T w_1} \right),$$

Que es un punto de inflexión entre el espacio de operaciones seguras y el espacio de cambios críticos.

La variabilidad determinística está asociada a $\frac{dx}{dt} = Ax + \operatorname{Re}(e^{-i\omega t} v)$ cuya solución es $v_0 = \sup |(w - A)^{-1}|, w \in R$. Si en lugar de única afectación es remplazada por perturbaciones ambientales persistentes la ecuación diferencial es estocástica, $dx = Axdt + T\xi(t)dt$ donde $\xi(t)$ es ruido blanco con estado estacionario x . El correspondiente modelo estocástico lineal es $dx=Axdt+Tdw(t)$, con $w(t)$ un movimiento browniano en función de x .

El exponente de Lyapunov expresado con la norma de Frobenius $|\Sigma|_F = \sqrt{\operatorname{Traza}(\Sigma\Sigma^T)}$ es

$$v_s = \sup_{\substack{|\Sigma|_F=1 \\ \Sigma \geq 0}} | -\widehat{A}^{-1}(\Sigma) |_F$$

y la invariabilidad es $I_s = \frac{1}{2} v_s^{-1}$, donde v_s es el mayor valor estacionario de la matriz de covarianza $\Sigma=TT^T$ y operador $\widehat{A}(\square_*) = A \square_* + \square_* A^T = -\Sigma$, o sea $\widehat{A}(\square_*) + \Sigma = 0$, resuelta de covarianza estacionaria $\square_* = -((\widehat{A})^{-1}\Sigma)$.

4. RESILIENCIA NO LINEAL

La detección del umbral resiliente se visualiza como puntos de bifurcación de tipo catástrofes o histéresis, los seres vivos en su estructura diversa se desarrollan lejos del equilibrio y corresponden a fenómenos fuertemente invertibles y disipativos que intercambian energía y materia con su entorno; estos sistemas lejos del equilibrio son autoorganizados y son tan complejos como el fenómeno de histéresis del oscilador Van der Pol, Bar-Yum (1997),

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + y = 0$$

que según Benitez y Bolos (2009) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = \left[\varepsilon \left(y - \frac{y^3}{3} \right) - x \right] \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

y por la trasformada de Lienard se obtiene

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} = \frac{d}{dt} \left[\dot{y} + \varepsilon \left(\frac{y^3}{3} - y \right) \right], \text{ esto es } \begin{cases} \dot{y} = w - \varepsilon F(y) \\ \dot{w} = -y \end{cases}$$

del primer sistema y bajo incertidumbres este sistema estocástico, Njoseh y Mamadu(2016) es:

$$\begin{cases} dX_t^2 = \left[X_t^1 - \frac{1}{3} X_t^3 - X_t^2 \right] + \varphi(X_t^1) dw_t \\ dX_t^1 = [X_t^2] dt \end{cases}$$

donde $\varphi(t)$ intensidad del ruido blanco

5. PROCESOS ADAPTATIVOS

Los modelos resilientes no lineales básicamente estudian la adaptación a través de las isoclinas del siguiente modelo tridimensional de Lotka-Volterra del tipo Holling, para una cadena alimenticia en el caso de no superar el umbral de Hopf, Muratoni S. and Sergio Rinaldi (1989).

En el caso del lado derecho de la siguiente modelo y figura 2, Zeeman M.L.(1990), se ilustra el paso a través del fenómeno de histéresis catastrófica

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - f_1(x)y \\ \frac{dy}{dt} = f_1(x)y - f_2(x)z - d_1y, \text{ con } f_i(u) = \frac{a_i u}{(1 + b_i u)} \\ \frac{dz}{dt} = f_2(x)z - d_2z \end{cases}$$

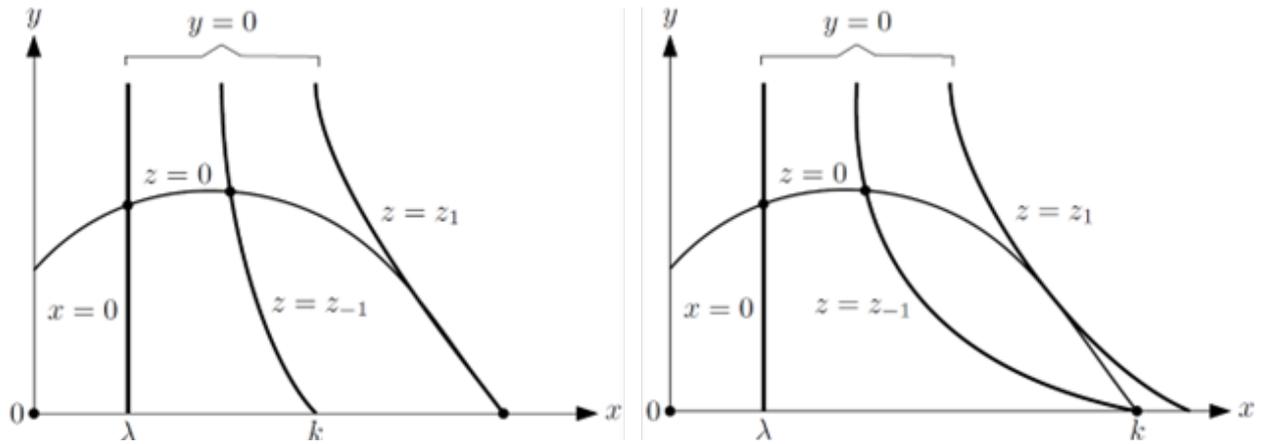


FIGURA 2. BIFURCACIÓN DE HOPF EN ESPACIO X, Y CONTRA B_1 EN LA VARIABLE X, ZEEMAN M.L. (1990)

Este modelo que permite construir versión estocástica por la interacción sostenible entre s agentes, biodiversidad ecosistémica, tales que,

$$\sum_{i=1}^s x_i^t = N, \forall t > 0$$

donde N es el tamaño de la población N, donde x_i^t es el tamaño de la población de la especie i en el tiempo t y $x_{k,i}^t$ es la interacción entre ellas, resulta el siguiente modelo de evolución en diferencias finitas a partir de la tasa de crecimiento $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$:

$$x_i^{t+1} = N \frac{\sum_{k=1}^s x_{k,i}^t + b}{\left(\sum_{k=1}^s (\sum_{i=1}^s x_{k,i}^t + b)\right)}$$

que según la ley de los grandes números es el proceso estocástico discreto siguiente:

$$x_i^{t+1} = N \frac{\bar{\lambda} x_i^t + \sigma \sqrt{x_i^t} \xi_i^t + b}{\sum_{j=1}^s \left(\bar{\lambda} x_j^t + \sigma \sqrt{x_j^t} \xi_j^t + b\right)}$$

Con modelo continuo expresado en términos de fluctuaciones de Langevin como

$$\dot{x}_i = f_i(x) + \sum_{j=1}^s B_{ij}(x) \xi_{ij}$$

donde ξ_{ij} es gaussiano de Wiener,

$$f_i(x) = b \left(1 - \frac{x_i}{N}\right) \text{ y } B_{ij}(x) = B_{ij}(\bar{x}) = \left(\xi_{ij} - \frac{x_i}{N}\right) \sqrt{x_i}$$

Modelo que deriva la siguiente ecuación de evolución probabilística Fokker-Planck-Kolmogorov para la función potencial f ,

$$\dot{P}(\underline{x}, t) = - \sum_{i=1}^s \partial_i \left[-f_i P(\underline{x}, t) + D \sum_j \partial_j (g_{ji} \dot{P}(\underline{x}, t)) \right],$$

el coeficiente de dispersión es $D = \frac{\sigma}{2}$, también

$$g_{ij}(\underline{x}) = g_{ji}(\underline{x}) = \sum_k B_{ik} B_{kj} = \left(\xi_{ij} - \frac{x_j}{N}\right) \sqrt{x_i}$$

se deduce $b \left(1 - \frac{x^\lambda}{N}\right) P(x) = D \frac{d}{dx} \left(\left(x - \frac{x^2}{N}\right) P(x) \right)$, y entonces

$$P(x) \sim x^{B-1} \left(1 - \frac{x}{N}\right)^{B\left(x - \frac{1}{N}\right)-1}.$$

Cuando $\beta = \frac{b}{D}$ se obtienen la siguiente distribución de probabilidades cuando $N \rightarrow \infty$:

$$P(x) = \frac{\mu^\beta}{\nu(\beta) x^{1+\beta}} \quad \text{con} \quad \mu = \frac{\beta s}{N}.$$

La tragedia de los bienes comunes

El extractor individualmente tiende a extraer el máximo de recursos y todos pensando lo mismo ocasionarán la crisis de la “tragedia de los comunes”, Weitz, Joshua S. 2016:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{c_t} \pi = \sum \delta^t \pi_t(B_t, c_t) \\ \text{sujeto a} \\ B_{t+1} - B_t = F(c_t) \text{ con } F \text{ logística y } c_0 = A \\ \delta = \frac{1}{1 + \rho}, \rho \text{ tasa intertemporal} \end{array} \right.$$

Correspondiente al siguiente modelo estocástico, J.M. Conrad y Smith (1999)

Donde d_t son los datos de la serie, y_t es la salida del sistema real, S_t son las variables de estados, u_t son las variables de control, f es una función de ajuste mínimo cuadrados y peso relativo de cada serie $w_i = \frac{1}{\sigma^2}$ y con la hipótesis de estimación de parámetros observable; la calibración es explícita mediante optimizando de la información con máxima probabilidad del método de Monte Carlo.

6. CONCLUSIÓN

Relacionamos modelos matemáticos básicos sobre la sostenibilidad de sistemas ambientales para aproximarnos cualitativamente la capacidad de resiliencia y adaptación de los agentes que intervienen y en los cuales existe un nivel de umbral que se interpreta como parámetro de sostenibilidad. Metodológicamente estudiamos la evolución de los sistemas que aproximan al fenómeno, primero como sistemas internos que son lineales y luego considerando las interacciones ambientales con el entorno, con modelos no lineales con diversos agentes y son expresión de la biodiversidad, estos también tienen versión estocástica. Dada la limitación de recursos para la sobrevivencia, es necesario optimizar procesos que correspondan a la Bioeconomía, entre ellos los que favorezca la cooperación como es el caso el modelo de las tragedias de los comunes.

REFERENCIAS

- Al Hdaibat, B, y W Govaerts. 2013. "Mat-Cont tutorial on starting up homoclinic orbits from Bogdanov-Takens point."
- Arnoldi, Jean-François, Michel Loreau, y Bart Haegeman. 2016. "Resilience, Reactivity and Variability: A Mathematical Comparison of Ecological Stability Measures."
- Bak Per, 1987. Self organized critical, Physical Letters
- Bar-Yum, Y. 1997. "Dynamic of Complex Systems." Reading: Addison-Wesley.
- Benitez and Bolos (2009). Invariant Manifold B.V.d.P, chaos solitons and fractal <https://doi.org/10.1063/1.4915528>
- Brown, Eric, Jeff Moehlis, y Philip Holmes. 2004. On the Phase Reduction and Response Dynamics of Neural Oscillator Population. <https://doi.org/10.1162/089976604322860668>
- Conrad, Jon M. 1999. Resource Economics. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511814587>
- Eysenbach B. and Levine S. 2004. MaxEnt R, Maxima Entropia
- Fernández, Miguel A. 2004. "Control Del Caos." Universidad de La Rioja.
- Flores-Bazan, Fabian, Eladio Ocaña Anaya, y Christiane Tammer. 2022. Special Issue International Seminar on Optimization and Related Areas.
- Gallopín, Gilberto C. 2006. Linkages Between Vulnerability, Resilience, and Adaptive Capacity.
- Gavier, Gregorio. 2017. "Introducción de Los Modelos En La Ecología Del Paisaje y La Región, Ecologia Regional UBA Argentina." Ecology.
- Holland, John. 2004. El Orden Oculto: De cómo La Adaptación Crea La Complejidad.
- Holling, Crawford S. 2011. "Understanding the Complexity of Economic, Ecological, and Social Systems." Ecosystems <https://doi.org/10.1017/9781009177856.038>
- Holling, Crawford S 2011. "Resilience and Stability of Ecological Systems." Annual Review of Ecology and Systematics.
- Holmes, Philip, John L. Lumley, and Gal Berkooz. 1996. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry. Cambridge Monographs on Mechanics.
- Kalinin, Nikita. 2020. "Pattern Formation and Tropical Geometry." Frontiers in Physics
- Kampis, George. 1991. Self-Modifying Systems in Biology and Cognitive Science: A New Framework for Dynamics, Information and Complexity. Vol. 6. Elsevier.
- Lara, Michel De. 2022. Introduction to One and Two-Stage Stochastic and Robust Optimization.
- Lensman, Todd. 2020. "Mixed Taxation and the Atkinson-Stiglitz Theorem.
- Maldonado, Jorge Higinio et al. 2008. Economía de Recursos Naturales-Aplicaciones de La Economía Computacional a La Solución de Problemas Dinámicos. <https://doi.org/10.57784/1992/26228>
- Mayumi, K. (2001). The origins of Ecological Economics, Routledge London.

- Njoseh, Ignatius N, y Ebimene J Mamadu. 2016. Variational Topic-Perturbatio Nigerian Journal of Mathematics and Applications.
- Newman, E.J. 2004. Power Laws, Pareto distributions and Zipf's law
- Rafikul, A (2006). On the sensibility analysis of engivalues.
- Oliva, Rogelio. 2003. Model Calibration as a Testing Strategy for System Dynamics Models. European Journal of Operational Research 151.
- Weitz, Joshua S. 2016. Oscillating Tragedy of the Commons in Replicator Dynamics with Game-Environment Feedback. Proceedings of the National Academy of Sciences 113.
- Zeeman M.L. (1990) Lotka Volterra tridimensional, IMA.